Équivalent d'une suite définie par récurrence

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.
- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou de sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ où $a > 0$ et $\alpha > 1$.*
Pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définit par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0 et on a

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Preuve:

Étape 1 : Montrons la convergence de (u_n)

Par continuité de f, on a $f(0) = 0$ et avec le développement asymptotique, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta], f(x) < x$. Si $u_0 \in]0, \eta]$, la suite (u_n) est décroissante et positive donc par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe sur $[0, c]$ donc converge vers 0.

Étape 2 : Montrons l'équivalence de (u_n)

Déterminons β tel que $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)$ ait une limite non nulle. Comme $\alpha > 1$, on a

$$\begin{aligned} f(x)^\beta - x^\beta &= (x - ax^\alpha + \underset{x\to 0}{o}(x^\alpha))^\beta - x^\beta \\ &= x^\beta[1 - x^{\alpha-\beta} + \underset{x\to 0}{o}(x^{\alpha-\beta})]^\beta - x^\beta \\ &= x^\beta[-a\beta x^{\alpha-1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{\alpha-1})] \underset{x\to 0}{\sim} -a\beta x^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

En prenant $\beta = 1 - \alpha$, on a $f(x)^\beta - x^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} a(\alpha-1)$.
En particulier, comme la suite (u_n) converge vers 0, on a $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a(\alpha-1)$.

Par théorème de Cesaro, on a $u_n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} na(\alpha-1)$. D'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

□

Application. *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. On a*

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Preuve: Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)$ donc en appliquant le théorème précédent avec $\alpha = 2$ et $a = -\frac{1}{2}$ on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.
Pour aller plus loin, poussons le développement asymptotique :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} &= \left(u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{3}u_n^3 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^3)\right)^{-1} - u_n^{-1} \\
&= u_n^{-1}\left((1 - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2))^{-1} - 1)\right) \\
&= u_n^{-1}\left(\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{1}{4}u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{4}u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)
\end{aligned}$$

Donc en posant $x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$, on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}$.

Comme $\left\{\begin{array}{l} \sum \frac{1}{6n} \text{ diverge} \\ \left(\frac{1}{6n}\right) \text{ est de signe constant} \end{array}\right.$, on a par sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{6}\ln(n)$$

D'où

$$u_n^{-1} - u_1^{-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1} = \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$$

D'où

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))\right)^{-1} \\
&= \frac{2}{n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{-1} \\
&= \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

□

Références

[1] Julien Bernis et Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements*. Ellipses, 2018.